

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm):

Câu I (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm tọa độ điểm M trên đồ thị (C) biết rằng tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

Câu II (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $2 \cos x \cos 3x + \sqrt{3}(1 - \sin 2x) = 2\sqrt{3} \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy + 3y = -1 \\ 2x + 5 = y \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Câu III (1,0 điểm) Tính tích phân: $I = \int_3^8 \frac{(x^2+1)}{x\sqrt{x+1}} dx$.

Câu IV (1,0 điểm) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = a\sqrt{2}$. Biết rằng mặt phẳng $(B'AC)$ cách điểm B một khoảng bằng a và tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° , hãy tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

Câu V (1,0 điểm) Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y + xy = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} \leq x^2 + y^2 + \frac{3}{2}.$$

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; -7)$, trọng tâm $G\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-2; 0)$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C, biết rằng đỉnh C có hoành độ dương.
2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-4}$ và điểm $M(0; 0; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M sao cho (P) song song với đường thẳng d và (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Câu VII.a (1,0 điểm) Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 3i + 3| = 1$ và $(z+1)(\bar{z}-i) \in \mathbf{R}$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ và điểm $M(1; -2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B tạo với đường thẳng AB một tam giác đều.
2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 3 = 0$ và hai điểm $A(3; 1; -2)$, $B(1; -3; 2)$. Tìm tọa độ điểm C trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC vuông tại C và mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) .

Câu VII.b (1,0 điểm) Giải bất phương trình: $\log_2 x \cdot \log_5(5x) + \log_5 x \cdot \log_2(2x^2) \geq 0, (x \in \mathbf{R})$.